Zajęcia 1: logika matematyczna

8.X.2014r.

Logika ma na celu konstruowanie spójnego obrazu świata i dbanie o to, by rozumowanie było konsystentne i niezawodne; nade wszystko, aby nie wyprowadzało nas poza przyjęte założenia (poprzez błędy metodologiczne, lub postawienie rozłącznego, niespójnego z poprzednimi, założenia). A zatem dba o korespondowanie języka matematyki z rzeczywistością (która jest jedna i niesprzeczna wewnętrznie).

Zdaniom matematycznym (w postaci stwierdzenia orzekającego lub przeczącego) w logice przyporządkowujemy dwie możliwe wartości: prawdę (1) lub fałsz (0). W statystyce mamy jeszcze do czynienia ze zdaniami prawdopodobnie prawdziwymi (celem statystyki jest określanie ich stopnia prawdziwości, w zależności od przyjętych parametrów), ale tutaj nie wprowadza się ich.

Aksjomat (A1). Zdania logiczne można z sobą łączyć; wynik połączenia jest zdaniem logicznym. Połączenie nazywamy także relacją lub działaniem. Mamy do czynienia z: alternatywą, koniunkcją, wynikaniem (implikacją) i równoważnością.

Odpowiednio:

Definicja (D1). Alternatywa, koniunkcja, implikacja, równoważność:

p, q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0, 0	0	0	1	1
0, 1	1	0	1	0
1, 0	1	0	0	0
1, 1	1	1	1	1

Definicja (D2). Wprowadza się operator jednoargumentowy negacji (nie):

s	$\neg s$, ~s, !s
0	1
1	0

Ćwiczenie (C1). Wyrazić $\neg\,(p \Rightarrow q)$ za pomocą odpowiedniego połączenia p i q, w tym ich negacji. Oznacza to, że stworzona kombinacja musi mieć takie same wartości logiczne przy każdej kombinacji wartości logicznych p i q, co wyjściowa formuła.

Następnie sprawdzić zdroworozsądkową sensowność wyniku za pomocą zdań: p – „jest dzisiaj środa”, q – „mamy lekcję”. Formułę $p \Rightarrow q$ przeczytać jako: „Jeśli [p], to [q].” Negację, stosownie do reguł języka polskiego, odczytać jako „Nieprawda, że” (na początku zdania) oraz „nie” (wewnątrz zdania).

Ćwiczenie (C2). Ocenić wartość logiczną zdania, w zależności od wartości logicznej zdań elementarnych p i q: $\neg\ (p \Rightarrow q)\ \Leftrightarrow\ p \wedge \neg q$. Równoważność jako działanie ma najniższy priorytet wykonywania.

Definicja (D2). Zdanie takie, jak w C2, które jest zawsze prawdziwe, nazywamy *tautologią*.

Definicja (D3). Jeśli wynikanie jest tautologią, to nazywa się ono wynikaniem *niezawodnym*, czyli *dedukcyjnym.*

Tautologiczność zdania (formuły) przekonuje nas, że jest ona zbudowana prawidłowo, że jest ono logicznie spójne i nie wprowadzi nas w błąd przy rozumowaniu. W logice matematycznej dbamy zatem o to, aby każde wynikanie było dedukcyjne, i w ogóle każde rozumowanie – tautologiczne.

Nazewnictwo (N1). W szczególności: jeśli z przesłanek p_1, p_2, … ma wynikać dedukcyjnie teza q, to oznacza to konieczność sprawdzenia przez nas niezawodności następującego zdania: $p_1 \wedge p_2 \wedge ... \Rightarrow q$.

Relacja (np. negacja, wynikanie) przesłanek elementarnych może być pojedynczą zadaną nam przesłanką. Tak jak w ćwiczeniu poniżej:

Ćwiczenie (C3), czas wykonania: 15 minut. Proszę sprawdzić, czy następujące rozumowanie jest niezawodne. (Należy znaleźć pojedyncze przesłanki i tezę oraz ich relacje, i sprawdzić tautologiczność formuły N1.)

Pan Henio po wypłacie się upija. Pan Henio nie jest pijany. A zatem nie miał wypłaty.

Wskazówka: pierwsze zdanie jest równoważne następującemu: *jeżeli p.H miał wypłatę, to jest pijany.* Stąd już łatwo wskazać przesłanki elementarne i relację pomiędzy nimi.

Nie czytaj tego, póki nie zrobisz C3 lub czas nie minie:

Prawie całe rozwiązanie: N1 przyjmuje postać: $[(w \Rightarrow p) \wedge \neg p]\ \Rightarrow\ [\neg w]$, ponieważ $p_1\ :=\ (w \Rightarrow p);\ \ p_2\ :=\ \neg p;\ \ q\ :=\ \neg w$.

Zdania logiczne mogą dotyczyć (i w matematyce zwykle dotyczą) zbiorów pewnych elementów (np. punktów, zbiorów teoriomnogościowych, figur, funkcji, twierdzeń). Mamy przy tym możliwość dokonywania selekcji elementów, o których coś twierdzimy. To znaczy, że możemy coś stwierdzić o większej liczbie elementów naraz, w jednym zdaniu, co jest o tyle wygodne, że możemy mieć do czynienia z licznymi, a zwłaszcza z niepoliczalnymi zbiorami elementów.

Dokonujemy tego za pomocą kwantyfikatorów.

Definicja (D4). Kwantyfikatorem ogólnym (symbol $\forall$, $\wedge$) nazywamy działanie, które wybiera wszystkie elementy danego zbioru. Zdanie logiczne będzie oznaczać odtąd, że stosuje się ono jednakowo (jest jednakowo prawdziwe) dla każdego elementu tego zbioru. $\forall$ x czytamy „dla każdego x”.

Definicja (D5). Kwantyfikatorem szczegółowym (symbol $\exists$, $\vee$) nazywamy działanie, które wybiera co najmniej jeden element ze zbioru. Zdanie logiczne będzie odtąd oznaczać, że stosuje się do co najmniej jednego z elementów tego zbioru. $\exists$ x czytamy „istnieje taki x, (że)”.

Uwaga. $\neg\forall x:\ R(x)$ oznacza, jak widać, „nie dla każdego x”, czyli „dla nie każdego x”, co jest równoważne z „istnieje taki x, że nie (spełnia relacji R)”, tzn. $\neg\forall x:\ R(x)\ \Leftrightarrow\ \exists x:\ \neg R(x)$.

Uwaga. $\neg\exists x:\ R(x)$, jak czytamy, oznacza „nie istnieje taki x, że”, co jest tożsame ze stwierdzeniem: „dla żadnego x nie (jest spełniona relacja R)”, czyli „dla każdego x jest nie spełnione R”, tzn. $\neg\exists x:\ R(x)\ \Leftrightarrow\ \forall x:\ \neg R(x)$.

Powyższe Uwagi dla kwantyfikatorów wypływają bezpośrednio z *reguł de Morgana* dla wyrażeń logicznych. Stanowić one będą zarazem dla Czytelnika

Ćwiczenie (C4), aby wykazał ich tautologię, czyli wewnętrzną poprawność:

$$\neg(p\vee q)\ \Leftrightarrow\ \neg p\wedge\neg q\ ;$$
$$\neg(p\wedge q)\ \Leftrightarrow\ \neg p\vee\neg q\ .$$

W ramach tego samego Ćwiczenia, Czytelnik jest zobowiązany podać dwa zdania z życia wzięte, które podstawi pod *p* i *q*, i w ten sposób przekona się o sensowności reguł de Morgana.

Znana jest już nam elementarna zasada rozumowania w matematyce, czyli Indukcja Matematyczna. W niej mówimy o elementach zbioru kolejnych Twierdzeń (które są ponumerowane kolejno: T_1, T_2, T_3, … Wynikanie I.M. jest niezawodne (por. N1):

$$p_1\ :=\ T_1\in U\ ;\ \ p_2\ :=\ \forall T_i: T_i\in U\Rightarrow T_{i+1}\in U\ ;\ \ q\ :=\ U=\mathbb{N}\ .$$

Ćwiczenie (C5), czas wykonania: 5 minut. Zapisać w postaci symboli logiki matematycznej słynną definicję *granicy ciągu*. Słowo „jeśli”, „gdy” w definicjach należy rozumieć jako równoważność, a nie implikację. Treść poniżej:

Liczba rzeczywista g jest granicą ciągu (x_n), gdy dla każdego $\epsilon>0$ *istnieje taki naturalny* *indeks n_0, że dla każdego $n > n_0$, odległość wyrazu x_n od liczby g jest mniejsza niż* ϵ .

Spoiler poniżej:

Odpowiedź: $\mathbb{R} \ni g \ =: \ \lim_{n \to \infty} x_n \ \Leftrightarrow \ \forall \epsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n > n_0 : \ |x_n - g| < \epsilon$.

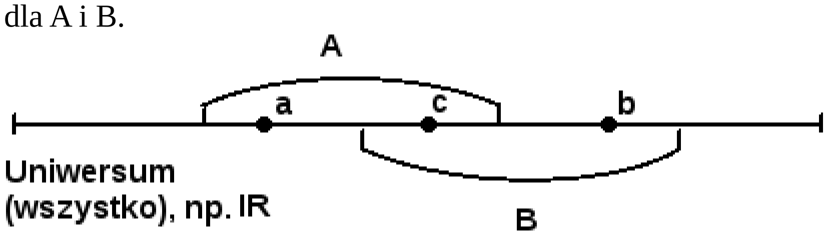
Challenge (C6*), czas wykonania: 30 minut. Popracujmy w warstwie abstrakcji matematycznych pojęć i relacji między nimi. Wprowadźmy następującą definicję (z logiki ontycznej):

Zbiory A i B się krzyżują (A k B), jeśli jednocześnie:

K1. Istnieje pewien element a w zbiorze A, nie należący do B;

K2. Istnieje pewien element b w zbiorze B, nie należący do A;

K3. Istnieje pewien element c wspólny dla A i B.



Zadaniem Czytelnika jest:

1) Podanie z życia wziętego przykładu dwóch krzyżujących się zbiorów;

2) Zapisanie definicji krzyżowania się zbiorów, A k B, w języku symboli matematycznych;

3) Sprawdzenie, że A k B dokładnie wtedy, gdy A' k B' oraz dokładnie wtedy, gdy A k B' (te trzy relacje są równoważne), pod warunkiem, że suma $A \cup B$ nie wypełnia całego uniwersum (np. całej osi $\mathbb{R}$).

W tym celu przypominamy oczywistość, że $x \in (Y \wedge Z) \ \Leftrightarrow \ x \in Y \wedge x \in Z$ oraz podajemy *Wskazówkę:* zbiór A warto rozłożyć na pewną sumę... I podobnie B.

4) Dlaczego nie ma sensu sprawdzanie tych równoważności z czwartą do kompletu relacją A' k B (która też jest oczywiście równoważna z poprzednimi)?